Το Λήμμα του Fejér και Εφαρμογές

Ανδρέας Καβατζικλής
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου 157 80
Αθήνα
e-mail: kaviros@central.ntua.gr
13 Ιουλίου 2009

Περίληψη

Επεχειρούμε μια γενίκευση του Λήμματος του Fejér, βλέπε [2,4], και αποδεικνύουμε ως πόρισμα το κλασσικό Λήμμα των Riemann-Lebesgue. Επίσης δίνουμε μερικές ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Τέλος εξετάζουμε την ισχύ του αντιστρόφου τουΛήμματος των Riemann-Lebesgue .

1 Εισαγωγή

Έστω η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ υπάρχει. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία ολοκλήρωσης Riemann, παραπέμπουμε στο [5, Chapter 3, Pt II, Problem 118], μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx dx = 0, \qquad (1)$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \qquad (2)$$

Επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, η (1) είναι άμεση συνέπεια του λήμματος των Riemann-Lebesgue. Η (2) είναι ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού αποτελέσματος γνωστού και σαν *λήμμα του Fejér [2,4]. Στην επόμενη παράγραφο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε αυτά τα κλασσικά αποτελέσματα της Αρμονικής Ανάλυσης. Μάλιστα, θα αποδείξουμε ότι το λήμμα των Riemann-Lebesgue είναι ένα πόρισμα του λήμματος Fejér.*

Για τη συνέχεια χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς και συμβολισμούς. Έστω T είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $\mathrm{T} = \{ z \in \mathrm{C} : |z| = 1 \}$.Η σύναρτηση $t \mapsto e^{it}$ απεικονίζει το R επί του T. Αν $F : \mathrm{T} \to \mathrm{C}$, τότε η $f(t) := F(e^{it})$ είναι 2π-περιοδική σύναρτηση.

Αντίστροφα, αν η $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ είναι περιοδική, με περίοδο 2π, τότε υπάρχει

$F:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F\left(e^{it}\right)=f\left(t\right)$. Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{T}$ με 2π-περιοδικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$.Ο χώρος $L_p\left(\mathbb{T}\right)$, $1\le p\le\infty$, είναι η κλάση όλων των μιγαδικών, Lebesgue μετρήσιμων, 2π-περιοδικών συναρτήσεων $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με νόρμα

$$\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t\right)\right|^p dt\right)^{1/p}<\infty,\ 1\le p<\infty \text{ και } \|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_{t\in[-\pi,\pi]}\left|f\left(t\right)\right|.$$

Επίσης γράφουμε

$$\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{T}}|f|^p d\mu\right)^{1/p},1\le p<\infty \text{, όπου } d\mu\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}dt,$$

δηλαδή το μ είναι μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{T}$ που διαιρείται με 2π. Το $C(\mathbb{T})$ είναι ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ με τη *supremum* νόρμα

$$\|f\|_\infty=\sup_t\left|f\left(t\right)\right|.$$

Ορισμός 1 *Αν* $f\in L_1\left(\mathbb{T}\right)$*, τότε το*

$$f\left(n\right):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)e^{-int}dt,\quad n\in\mathbb{Z},$$

είναι ο n**-οστός συντελεστής Fourier της** f . **Η εκθετική (ή μιγαδική) μορφή της σειράς Fourier της** f είναι η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(n\right)e^{int} \tag{3}$$

και τα μερικά αθροίσματά της είναι τα

$$S_n\left(f\right)\left(t\right)=\sum_{k=-n}^{n}f\left(k\right)e^{ikt}.$$

Η τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier της f είναι η σειρά

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right),$$

όπου

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\cos nt\,dt,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

και

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\sin nt\,dt,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Ως γνωστόν, αν $F\in L_1\left[-a,a\right]$, $a>0$, τότε

$$\int_{-a}^{a}F\left(x\right)dx=\begin{cases}2\int_0^a F\left(x\right)dx & \text{αν η } F \text{ είναι άρτια,}\\ 0 & \text{αν η } F \text{ είναι περιττή.}\end{cases}$$

Επομένως,

αν η $f\in L_1\left(\mathbb{T}\right)$ είναι άρτια, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(t\right)\cos nt\,dt$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}$,

αν η $f\in L_1\left(\mathbb{T}\right)$ είναι περιττή, $a_n=0$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(t\right)\cos nt\,dt$, $n\in\mathbb{N}$.

Συμβολισμός. Αν $f\in L_1\left(\mathbb{T}\right)$, με

$$f(t): \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{int}$$

εκφράζουμε τη σχέση που συνδέει τη συνάρτηση f με τη σειρά Fourier της f.Χρησιμοποιείται αυτός ο συμβολισμός για συντομία αντί να γράφουμε τις εξισώσεις

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad n \in \mathrm{Z} .$$

Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad t \in \mathrm{R} ,$$

όπου $a_0,\ldots,a_n$ και $b_0,\ldots,b_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο γράφεται και στην μορφή

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathrm{R} \text{ , όπου } c_k \in \mathbb{C} .$$

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι 2π -περιοδικές συναρτήσεις.

2 Απόδειξη του Λήμματος Fejér-Εφαρμογές

Θεώρημα 1 (Λήμμα του Fejér) *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ *(ή* $g:\mathrm{R}\to\mathrm{C}$ *) είναι Lebesgue μετρήσιμη, φραγμένη και περιοδική με περίοδο* $T>0$*. Αν* $f \in L_1(I)$*, όπου* I *είναι ένα διάστημα του* R *, τότε*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)g(\lambda x)dx = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\right)\left(\int_I f(x)dx\right). \quad (4)$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_0^T g(x)dx = 0$. Πράγματι, αν $\int_0^T g(x)dx \neq 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) := g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx .$$

Η h είναι Lebesgue μετρήσιμη, φραγμένη, περιοδική με περίοδο $T>0$ και

$$\int_0^T h(x)dx = \int_0^T g(x)dx - \int_0^T\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\right)dx = \int_0^T g(x)dx - \int_0^T g(x)dx = 0 .$$

Αν αποδείξουμε ότι $\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)h(\lambda x)dx = 0$, από τον ορισμό της h προκύπτει η απόδειξη της (4).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_0^T g(x)dx = 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)g(\lambda x)dx = 0$. Έστω

$$G(x) := \int_0^x g(t)dt .$$

Αν $x = kT$, $k \in \mathrm{Z}$, επειδή η g είναι T -περιοδική έχουμε

$$G(kT) := \int_0^{kT} g(t)dt = k\int_0^T g(t)dt = 0 .$$

Αν $kT < x < (k+1)T$, $k \in \mathrm{Z}$, τότε

$$
\begin{aligned}
|G(x)| &= \left|\int_0^{kT} g(t)dt + \int_{kT}^{x} g(t)dt\right| \\
&\le \left|\int_0^{kT} g(t)dt\right| + \int_{kT}^{x} |g(t)|dt \\
&= \left|k\int_0^{T} g(t)dt\right| + \int_{kT}^{x} |g(t)|dt \quad (\text{η } g \text{ είναι } T\text{-περιοδική}) \\
&= \int_{kT}^{x} |g(t)|dt \\
&\le \int_{kT}^{(k+1)T} |g(t)|dt \\
&= \int_0^{T} |g(t)|dt . \qquad\qquad (\text{η } |g| \text{ είναι } T\text{-περιοδική})
\end{aligned}
$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathrm{R}$

$$
|G(x)| \le \int_0^T |g(t)|dt ,
$$

δηλαδή η G είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο R. Αν I είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα, έστω $I = (a,b)$, τότε

$$
\int_I g(\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)dt = \frac{1}{\lambda}\big(G(\lambda b) - G(\lambda a)\big).
$$

Επομένως

$$
\left|\int_I g(\lambda x)dx\right| \le \frac{2}{|\lambda|}\int_0^T |g(t)|dt
$$

και κατά συνέπεια

$$
\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I g(\lambda x)dx = 0 .
$$

Αν ϕ είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση, δηλαδή γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων φραγμένων διαστημάτων, τότε

$$
\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, g(\lambda x)dx = 0 . \tag{5}
$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $f : I \to \mathrm{R}$ (ή $f : I \to \mathrm{C}$) είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο διάστημα I του R. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ολοκληρώσιμη κλιμακωτή συνάρτηση φ ορισμένη στο I με

$$
\int_I \left| f(x) - \phi(x)\right| dx < \varepsilon / \|g\|_\infty .
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_I f(x)\, g(\lambda x)dx\right| &\le \int_I \left| f(x) - \phi(x)\right| |g(\lambda x)|dx + \left|\int_I \phi(x)\, g(\lambda x)dx\right| \\
&\le \varepsilon + \left|\int_I \phi(x)\, g(\lambda x)dx\right|.
\end{aligned}
$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τη (5) τελικά έχουμε $\lim_{\lambda|\to\infty}\int_I f(x)\, g(\lambda x)dx = 0$. ■

Παρατήρηση 1 *Για* $g(x) = \sin x$ *ή* $g(x) = \cos x$, *το λήμμα του Fejér συνεπάγεται το λήμμα των Riemann-Lebesgue . Πράγματι, αν* I *είναι ένα διάστημα του* R, *από τη (4) έχουμε*

$$
\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)\sin\lambda x dx = 0 .
$$

Παράδειγμα 1 *Να υπολογιστεί το*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+3\cos^2\lambda x}dx .$$

Λύση. Η συνάρτηση $g(x)=1/\left(1+3\cos^2 x\right)$ είναι συνεχής, φραγμένη και περιοδική με περίοδο π. Από το λήμμα *Fejér* έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+3\cos^2\lambda x}dx &= \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+3\cos^2 x}dx\right)\left(\int_0^{\pi}\sin x dx\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+3\cos^2 x}dx\\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+3\cos^2 x}dx\\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+4}dt \qquad (\text{αντικατάσταση } t=\tan x)\\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{t\to\infty}\arctan\frac{t}{2}=1.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 *Έστω το $E\subset \mathrm{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E)<\infty$. Αν (k_n) είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (a_n) είναι μια οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία, τότε*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\cos^2(k_n x+a_n)dx=\frac{1}{2}m(E) .$$

Απόδειξη. Για τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα των Riemann-Lebesgue. Πράγματι, επειδή

$$\begin{aligned}\int_E\cos^2(k_n x+a_n)dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}}\left[1+\cos(2k_n x+2a_n)\right]\chi_E(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}}\chi_E(x)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}}\cos(2k_n x+2a_n)\chi_E(x)dx\\ &= \frac{1}{2}m(E)+\frac{\cos 2a_n}{2}\int_{\mathrm{R}}\chi_E(x)\cos 2k_n x dx-\frac{\sin 2a_n}{2}\int_{\mathrm{R}}\chi_E(x)\sin 2k_n x dx ,\end{aligned}$$

από το λήμμα των Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}&\left|\int_E\cos^2(k_n x+a_n)dx-\frac{1}{2}m(E)\right|\\ &\le\frac{1}{2}\left|\int_{\mathrm{R}}\chi_E(x)\cos 2k_n x dx\right|+\frac{1}{2}\left|\int_{\mathrm{R}}\chi_E(x)\sin 2k_n x dx\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 .\ \blacksquare\end{aligned}$$

Δίνουμε τώρα μια άλλη εφαρμογή του λήμματος *Fejér*.

Παράδειγμα 3 *Έστω οι συναρτήσεις f,g είναι Lebesgue μετρήσιμες και 2π-περιοδικές με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Αν $f\in L_1[-\pi,\pi]$ και η g είναι φραγμένης κύμανσης, έστω*

$$f(t):\ \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right) \text{ και } g(t):\ \frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos nt+d_n\sin nt\right) .$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{kn}}{n}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{k(2n+1)}}{2n+1}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_{k(2n+1)}}{2n+1}=0 . \qquad (6)$$

Πράγματι, επειδή η g είναι φραγμένης κύμανσης, από το θεώρημα Dirichlet-Jordan (βλέπε [4,page 74])

$$g(t) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos nt + d_n \sin nt\right), \text{ σχεδόν παντού.}$$

Επομένως,

$$f(t)g(kt) = \frac{1}{2}f(t)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n f(t)\cos nkt + d_n f(t)\sin nkt\right), \text{ σχεδόν παντού.}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, χρησιμοποιώντας το κλασσικό θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue μπορούμε να ολοκληρώσουμε κάθε όρο της παραπάνω σειράς χωριστά οπότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(kt)dt = \frac{1}{2}a_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{nk}c_n + b_{nk}d_n\right).$$

Όμως, από το λήμμα του *Fejér* έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(kt)dt = \frac{1}{2}a_0c_0 .$$

Επομένως,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{nk}c_n + b_{nk}d_n\right) = 0 . \qquad (7)$$

Θεωρούμε τώρα τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2n+1)x}{2n+1}$$

οι οποίες είναι σειρές Fourier συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης. Τότε, από την (7) προκύπτει η απόδειξη της (6).

Ισχύει το αντίστροφο του Λήμματος Riemann-Lebesgue; Δηλαδή αν (c_n) είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$, υπάρχει $f \in L_1(\mathrm{T})$ τέτοια ώστε $c_n = \hat{f}(n)$ για κάθε $n \in \mathrm{Z}$; Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η απάντηση είναι αρνητική.

Ως γνωστόν, ο *πυρήνας του Dirichlet* είναι η ακολουθία (D_n), όπου

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}, \quad t \in \mathrm{T} .$$

Είναι

$$\left(e^{it}-1\right)D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+1)t} - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{i(n+1)t} - e^{-int},$$

οπότε για $t \neq 0$

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it}-1}\cdot\frac{e^{-it/2}}{e^{-it/2}} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} .$$

Δηλαδή,

$$D_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} & \alpha\nu\ t\neq 0,\\ 2n+1 & \alpha\nu\ t=0.\end{cases}$$

Λήμμα 2 *Αν* (D_N) *είναι ο πυρήνας Dirichle , τότε* $D_N\in L_1(\mathrm{T})$ *και οι όροι της ακολουθίας* $\left(D_N(n)\right)$ *είναι τελικά μηδέν, με* $\|D_N\|_\infty=1$, $N=1,2,\ldots$. *Είναι*

$$\lim_{N\to\infty}\|D_N\|_1=\infty .$$

Απόδειξη. Η D_N, $N\in\mathrm{N}$, είναι συνεχής, 2π -περιοδική συνάρτηση, δηλαδή $D_N\in L_1(\mathrm{T})$. Εύκολα φαίνεται ότι

$$D_N(n)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ |n|\leq N,\\ 0 & \alpha\nu\ |n|>N.\end{cases}$$

Επομένως οι όροι της ακολουθίας $\left(D_N(n)\right)$ είναι τελικά μηδέν, με $\|D_N\|_\infty=1$. Είναι

$$\begin{aligned}\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\right|dx \qquad \left(x=\frac{t}{2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\right|dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\right|dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\right|dt\\ &\geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{t}\right|dt . \qquad \left(0\leq\sin t\leq t,\ \gamma\iota\alpha\ 0\leq t\leq\tfrac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{t}\right|dt &= \sum_{n=0}^{2N}\int_{\frac{n\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(n+1)\pi}{2(2N+1)}}\left|\frac{\sin(2N+1)t}{t}\right|dt\\ &\geq \sum_{n=0}^{2N}\frac{2(2N+1)}{(n+1)\pi}\int_{\frac{n\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(n+1)\pi}{2(2N+1)}}\left|\sin(2N+1)t\right|dt\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}}|\sin x|dx \qquad \left(\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ x=(2N+1)t\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi/2}\sin x dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1} .\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|D_N\|_1 \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n+1} = \frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2N}\right).$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\|D_N\|_1 = \infty \text{ . } ■$$

Έστω $c_0(\mathrm{Z})$ είναι ο χώρος των μιγαδικών συναρτήσεων $\varphi : \mathrm{Z} \to \mathrm{C}$, με $\lim_{n\to\pm\infty}\varphi(n) = 0$. Ορίζουμε

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\,\varphi(n)\,| : n \in \mathrm{Z}\} \text{ .}$$

Ο $c_0(\mathrm{Z})$ είναι χώρος Banach.

Θεώρημα 3 *Η απεικόνιση*

$$\Lambda : L_1(\mathrm{T}) \to c_0(\mathrm{Z}), \text{ με } \Lambda : (f) := f \text{ ,}$$

είναι ένας $1-1$ και φραγμένος τελεστής που δεν είναι επί. Επομένως, υπάρχει ακολουθία μιγαδικών αριθμών (c_n) με $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n = 0$, για την οποία δεν ισχύει

$f(n) = c_n$, για κάθε $n \in \mathrm{Z}$ και για κάποια $f \in L_1(\mathrm{T})$.

Απόδειξη. Η Λ είναι γραμμική απεικόνιση. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue είναι $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f(n) = 0$ και κατά συνέπεια $\Lambda(f) = f \in c_0(\mathrm{Z})$. Από τον ορισμό του συντελεστή Fourier είναι προφανές ότι $|\,f(n)\,| \leq \|f\|_1$, οπότε $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$. Δηλαδή $\|\Lambda\| \leq 1$. Αν $f(t) = 1$, τότε

$$\Lambda(f)(n) = f(n) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ n = 0, \\ 0 & \alpha\nu\ n \neq 0. \end{cases}$$

Δηλαδή, $\|f\| = 1 = \|f\|_1$. Επομένως $\|\Lambda\| = 1$. Θα αποδείξουμε ότι η Λ είναι $1-1$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathrm{Z}$ συνεπάγεται ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Αυτό όμως ισχύει και μάλιστα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Fejér-Lebesgue (βλέπε Θεώρημα $4.18.5$ στο σύγγραμμα [1]).
Υποθέτουμε τώρα ότι η απεικόνιση $\Lambda : L_1(\mathrm{T}) \to c_0(\mathrm{Z})$ είναι επί. Τότε, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης (open mapping theorem), ο $\Lambda^{-1} : c_0(\mathrm{Z}) \to L_1(\mathrm{T})$ είναι συνεχής (φραγμένος) τελεστής. Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\Lambda(f)\|_\infty \geq \delta\|f\|_1, \quad \forall\ f \in L_1(\mathrm{T}) \text{ .}$$

Επομένως,

$$\|f\|_\infty \geq \delta\|f\|_1, \quad \forall\ f \in L_1(\mathrm{T}) \text{ .}$$

Θεωρούμε τον πυρήνα Dirichlet (D_N). Από το Λήμμα 2

$$D_N \in L_1(\mathrm{T}), \quad \|D_N\|_\infty = 1 \text{ και } \lim_{N\to\infty}\|D_N\|_1 = \infty \text{ .}$$

Άρα, δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|D_N\|_\infty \geq \delta\|D_N\|_1 \text{ ,}$$

άτοπο. ■

Αναφορές

[1] G. Bachmann, L. Narici and E. Beckenstein, Fourier and Wavelet Analysis (2nd printing), *Springer-Verlag (Series: Universitext), 2002.*

[2] R. E. Edwards, Fourier Series, vol. 1 *(2nd edition), Springer-Verlag , 1979.*

[3] R. E. Edwards, Fourier Series, vol. 2 *(2nd edition), Springer--Verlag , 1982.*

[4] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis (3rd edition), *Cambridge University Press, 2004.*

[5] G. Pólya, G. Szegö, Problems and Theorems in Analysis I, *Springer--Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998*.

[6] W. Rudin, Real and Complex Analysis (3rd ed.), *McGraw-Hill, 1987*.

[7] W. Rudin, Functional Analysis (2nd ed.), *McGraw-Hill, 1991*.

[8] A. Zygmund, Trigonometric series (3rd ed.)(volumes $I\&II$ combined), *Cambridge University Press, 2003*.

Abstract

We discuss a generalization of Fejér's Lemma, see [2,4], and we prove Riemann-Lebesgue's Lemma as a Corollary. We also give some intersting applications and finally we examine the validity of Riemann-Lebesgue's Lemma opposite.