«Τρεις κόσμοι διδασκαλίας των μαθηματικών:
ένα νέο πλαίσιο για τη διδακτική των μαθηματικών»

Μακρυγιάννης Α. Παναγιώτης
Υποψ. Διδάκτορας Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εργαστηριακός Συνεργάτης ΤΕΙ Πειραια
pmakrig@teipir.gr

Μακρυγιάννης Σ. Παναγιώτης
Εκπαιδευτικός Δ/θμιας Εκπ/σης
ΕΜΜΒΑ
mgiannis@sch.gr

Περίληψη

Ένας γόνιμος διάλογος ανάμεσα στον Tall και τους συνεργάτες του και σε αμφισβητίες με επικεφαλής τον Inglis σε σχέση με την θεωρία του πρώτου για τους τρείς κόσμους των μαθηματικών ανέδειξε ότι η θεωρία αυτή αποτελούσε στην πραγματικότητα δύο θεωρίες: μία ταξινομική και μία διδακτικής των μαθηματικών. Δεδομένου ότι το γεγονός αυτό δεν έγινε εξαρχής αντιληπτό στον Tall εκείνος δεν προχώρησε στην απαραίτητη τροποποίηση των διατυπώσεων του για τη δημιουργία μιας συνεκτικής θεωρίας-πλαισίου για τη διδακτική των μαθηματικών. Δια γνώσκοντας το κενό, το παρόν άρθρο προχωρά στην διατύπωση ενός τέτοιου πλαισίου με τρόπο συνεκτικό με τις διατυπώσεις του αρχικού δημιουργού. Το πλαίσιο αυτό εκτός της δυνατότητας να ενσωματώσει ποικίλα στοιχεία διδακτικής που έχουν αλλού διατυπωθεί, περιγράφει επιπλέον αδρά μια διδακτική μεθοδολογία που ενισχύει σημαντικά τις διδακτικές παρεμβάσεις.

Abstract

A fruitful dialogue between Tall and his colleagues and challengers led by Inglis relevant to Tall's theory on the three worlds of mathematics showed that this theory was in fact two theories: one taxonomic and one on teaching of mathematics. Since this was not perceived by Tall originally, he did not go to the necessary amending the wording to create a coherent theory framework for the teaching of mathematics. Diagnosing the gap, this article goes to the formulation of such a framework in a manner consistent with the wording of the original author. This framework, except from the ability to incorporate various elements of didactics delivered by others, also roughly describes a didactic methodology that significantly enhances teaching interventions.

Λέξεις κλειδιά

μαθηματικά αντικείμενα, σπειροειδής ανάπτυξη, μαθησιακοί στόχοι, θεμελιώδεις κύκλοι γνωστικής ανάπτυξης, συσσωματωμένο αντικείμενο, συμβολικό διακείμενο, αξιωματική έννοια.

1. Εισαγωγή- Ένας παραγωγικός διάλογος

Οι Gray και Tall εισήγαγαν σταδιακά από το 1984 έως το 2001 την ιδέα τριών τύπων μαθηματικών εννοιών ή/και αντικειμένων στα πλαίσια των μαθηματικών. Όπως οι ίδιοι το θέτουν σε ένα άρθρο του 2001 για αρκετά χρόνια τους απασχολούσε η ιδέα των τριών διαφορετικών τύπων εννοιών και συγκεκριμένα του συσσωματωμένου αντικειμένου (embodied object), του συμβολικού "διακειμένου" (symbolic procept) και τέλος της αξιωματικής έννοιας (axiomatic concept).

Η επιλογή των ελληνικών όρων δεν ήταν αυτόματη: Για τον όρο embodied εξετάστηκαν επίσης οι αποδόσεις ενσωματωμένο (που όμως δεν απέδιδε την διάσταση της μετατροπής σε αντικείμενο), σωματοποιημένο (που όμως δεν απέδιδε την ένταξή του σε ένα corpus λειτουργικών εννοιών), υλοποιημένο (που έδινε μια ελαφριά μεταφυσική διάσταση). Για τον όρο procept που αποτελεί νεολογισμό προερχόμενο από συνδυασμό των λέξεων procedure και object επιλέξαμε να ακολουθήσουμε την πρακτική της επανάληψης της διαδικασίας στα ελληνικά αφού αποδώσαμε το procedure ως διαδικασία και όχι ως διεργασία που είναι και το ορθότερο αφού το τελευταίο θα οδηγούσε σε μια κακοφωνία. Επίσης αποφύγαμε την προτεινομένη από τον Inglis αντιστροφή που θα οδηγούσε με όποια απόδοση procedure στο νεολογισμό "αντικασία" που δε μας φάνηκε διόλου προτιμότερος.

Στην πραγματικότητα αρχικά ήταν ανοιχτός ο αριθμός των τύπων εννοιών, με τους ίδιους τους συγγραφείς (Gray και Tall) να πειραματίζονται με ένα διαχωρισμό μεταξύ εκδοχών της λεγόμενης ψευδο-εμπειρικής αφαίρεσης (abstraction) και αυτών της εμπειρικής αφαίρεσης. Η ιδέα της διαφοροποίησης ανάμεσα στην εστίαση σε ενέργειες (actions) πάνω σε νοητικά (mental) αντικείμενα και στην εστίαση στις ιδιότητες αφηρημένων νοητικών εννοιών εγκαταλείφθηκε αφού και στις δύο περιπτώσεις τα τυπικά (formal) μαθηματικά αφορούν στον καθορισμό ενός συστήματος αξιωμάτων για έναν τύπο αξιωματικής δομής και συναγωγή των ιδιοτήτων της δομής μέσω τυπικών, λογικοθεωρητικών αποδείξεων.

Αργότερα ο Tall μαζί με την Poynter (τότε ονομαζόταν Watson) και τον Σπύρου εισήγαγαν το 2002 την έννοια τριών κόσμων των μαθηματικών βασιζόμενοι και στη δουλειά της Watson πάνω στην συσσωματωμένη δράση στη μαθηματική ανάπτυξη.

Σε αυτό το πλαίσιο τα *συσσωματωμένα αντικείμενα*, είναι αυτά που αντιλαμβανόμαστε είτε ως τέτοια είτε ως άμεσες αφαιρέσεις των όσων αντιλαμβανόμαστε. Συνθέτουν έναν κόσμο που είναι μια, εμπλουτισμένη με εννοιολογικές κατηγοριοποιήσεις, εκδοχή του αντιληπτού κόσμου. Η σχολικού επιπέδου γεωμετρία ανήκει σε αυτόν τον κόσμο.

Τα *«διακείμενα»* (διαδικαστικά αντικείμενα) είναι όσα αναπαριστώνται από ένα σύμβολο που μπορεί με μια ελαστικότητα να αποδίδει τόσο μια διαδικασία όσο και ένα αντικείμενο. Διατηρώντας κοινό το σύμβολο για τη διαδικασία και το αποτέλεσμά της (βλέπε π.χ. το άθροισμα, το όριο κλπ.) συνθέτουν έναν κόσμο ενεργών ή δραστικών αντικειμένων, όχι ιδιαίτερα δεσμευμένο από τον αντιληπτό παρ' ότι σε ένα βαθμό εκκινεί από αυτόν. Η σχολικού επιπέδου άλγεβρα και μέρος του οπλοστασίου εννοιών της πανεπιστημιακής ανάλυσης ανήκουν σε αυτόν τον κόσμο.(βλ. και Gray and Tall 1994).

Οι *αξιωματικές έννοιες* ή αξιωματικά αντικείμενα σχηματίζονται χρησιμοποιώντας αξιωματικούς ορισμούς και τα χειριζόμαστε μέσα από λογικές αποδείξεις (και ταυτολογικούς μετασχηματισμούς). Τα αφηρημένα ή ανώτερα μαθηματικά και ειδικά αυτά που αποτελούν ερευνητικά αντικείμενα σε μεγάλο βαθμό ζουν σε έναν αξιωματικό, λογικοθεωρητικό κόσμο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι διάφορες τοπολογίες.

Οι τρεις αυτοί κόσμοι, με τις διαφορετικές πρακτικές και μεθοδολογίες τους εξαντλούν αφενός τα μαθηματικά αντικείμενα και αφετέρου θέτουν τις προκλήσεις για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Το 2003 ο Inglis χρησιμοποιώντας την φανταστική σφαίρα του Lambert, που δεν ταξινομείται διαισθητικά σε κάποιον από τους τρεις κόσμους, αμφισβητεί κατά πόσον όλα τα αντικείμενα μπορούν να ενταχθούν στην κατηγοριοποίηση του Tall. Επιπλέον χρησιμοποιεί την διαισθητική αντίληψη που ο Abbott δημιουργεί στο παιδικό βιβλίο «Η επίπεδη χώρα» (1995) στους μικρούς αναγνώστες του, του υπερκύβου και γενικότερα μιας τετραδιάστατης γεωμετρίας μέσω αναλογιών και επιχειρηματολογεί ότι το αντικείμενο που οι μικροί μαθητές κατέχουν με την έννοια που ο Tall et al (2000) δίνουν – κάτι που μπορούν να διαχειριστούν και να μελετήσουν – επίσης δεν κατηγοριοποιείται.

Το σκεπτικό του μεταξύ άλλων στηρίζεται στην ιδέα της αναλογίας ως «δομικής μεταφοράς» (Pimm, 1987) και της μάθησης ως κύρια «μεταφορικής» διαδικασίας (Davis, 1984) η οποία χτίζει αναπαραστάσεις νέων ιδεών χρησιμοποιώντας αυτές οικείων και τροποποιώντας τες κατάλληλα.

Ο Tall στο άρθρο του Introducing three worlds of mathematics (2004) προσπαθεί να χρησιμοποιήσει παραγωγικά την κριτική του Inglis για να ισχυροποιήσει τη θεωρία του την οποία αντιμετωπίζει ως θεωρία σε ανάπτυξη. Στο κυρίως επιχείρημα που σχετίζεται με τον τύπο του αντικειμένου φανταστική σφαίρα ο Tall απαντά αναφερόμενος στην «φυσική διαδικασία» (natural process) της επέκτασης του χειρισμού συμβόλων που έχουν νόημα στον διακειμενικό κόσμο σε μια κατάσταση όπου η αντιστοίχηση με τον συσσωματωμένο κόσμο δεν υφίσταται πλέον. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι αντιστοιχίζει την περίπτωση με αυτή της χρήσης της τετραγωνικής ρίζας ενός αρνητικού αριθμού ως διαχειρίσιμο σύμβολο πριν αυτή συσσωματωθεί.

Εισάγει έτσι, σχεδόν απρόσεχτα, μια έννοια ιστορικότητας στην θεωρία του. Ακόμα και αν αυτή η προσθήκη είναι αιτία αμφισβήτησης της χρησιμότητας της θεωρίας ως ταξινομίας μαθηματικών αντικειμένων μπορεί να παίξει μεγάλο ρόλο_στη διαμόρφωση μιας διδακτικής των μαθηματικών με βάση τους τρεις κόσμους τους.

Υπερασπίζεται τα σύνορα των κόσμων διευρύνοντας την έννοια της συσσωμάτωσης. Διευρύνει την αντιληπτική συσσωμάτωση στην εννοιολογική συσσωμάτωση, περιλαμβάνοντας κάθε σύλληψη με οπτικο-χωρικούς όρους και όχι μόνο όσες προκύπτουν από την αντίληψη πραγματικών (actual) αντικειμένων.

Στην προσπάθειά του αυτή προχωρεί ουσιαστικά σε επαναδιατύπωση της θεωρίας του η οποία δεν είναι φανερή στον ίδιο αν και φαίνεται να του προκύπτει φυσικά. Ο ίδιος άλλωστε αναφέρεται στη συνήθειά του να προσεγγίζει διασταλτικά τις έννοιες που χρησιμοποιεί. Ήδη στην ιδέα της εικόνας μιας έννοιας (concept image) των Vinner και Hershkowitz (1980) πρόσθεσε συγκεκριμένο και σημαντικό γνωστικό βάρος όταν στο άρθρο του με τον Vinner (1981) προσθέτει στον ορισμό της ως «η συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με την έννοια και περιλαμβάνει όλες τις νοητικές της εικόνες και τις σχετιζόμενες ιδιότητες (properties)» την συμπλήρωση «και διαδικασίες». Ο ίδιος ο Tall θεωρεί ότι πρόκειται απλώς για μια διεύρυνση που επεκτείνει την ιδέα πέρα από μια οπτικο-χωρική έννοια ώστε να περιλάβει κάθε γνωστική δομή που συνδέεται με την εξεταζόμενη έννοια.

Έμμεσα αλλά σαφώς προσθέτει το ίδιο μη τετριμμένο γνωστικό βάρος στην περιγραφή τόσο της σωματοποίησης όσο και των τριών κόσμων. Οι διαδικασίες παίρνουν έναν κύριο ρόλο, στη θέση των αντικειμένων. Επίσης μιλά τώρα για εννοιολογικό-συσσωματωμένο κόσμο και για διακειμενικό-συμβολικό.

Ο Inglis στο αποχαιρετιστήριο του Tall αποδέχεται την αναδιατύπωση και αναγνωρίζει τα θετικά της υποδεικνύοντας όμως παράλληλα ότι η νέα προσέγγιση αποκλείει την αρχική στοχοθεσία μιας ταξινομίας μαθηματικών αντικειμένων. Αμφισβητεί την απάντηση του Tall σε σχέση με τον τύπο της φανταστικής σφαίρας χωρίς ιδιαίτερη ζέση ή επιτυχία.

Δύο σημεία παρουσιάζουν εδώ ενδιαφέρον με πρώτο την επιμονή του Inglis στη διατυπωμένη και το 2003 άποψή του ότι οι Gray and Tall έχουν την συνήθεια να χρησιμοποιούν εναλλακτικά τους όρους έννοια και αντικείμενο. Παρά το αναμφισβήτητο γεγονός ότι ο Tall δεν έχει απαντήσει ικανοποιητικά στην αιτίαση υπάρχει εύκολη απάντηση που έχει σχέση με την ιδέα της ιστορικότητας σε μια θεωρία ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Περισσότερα όμως σχετικά στο τελευταίο μέρος.

Το δεύτερο είναι ο ισχυρισμός του ότι η χρήση της «έννοιας του αριθμού» έναντι του «αντικειμένου του αριθμού» είναι πιο φυσική απλά και μόνο γιατί ο αριθμός δεν είναι αντικείμενο ούτε όμως και διακείμενο. Αυτό δε το στηρίζει στην ανυπαρξία διαδικασίας του αριθμού. Όμως αν μιλήσουμε για θετικούς φυσικούς αριθμούς υπάρχει η διαδικασία και είναι αυτή της αρίθμησης. Η επέκτασή της σε κάθε διεύρυνση, με τη σειρά που ιστορικά αυτή έγινε, της έννοιας του αριθμού μπορεί να γίνει προσθέτοντας μια από τις διαδικασίες που καθιστούσε τη διεύρυνση απαραίτητη.

Για παράδειγμα από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς η διαδικασία είναι ο υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας αρνητικού αριθμού.
Για έναν πληροφορικό δε ο σχετικός ισχυρισμός του ότι είναι παράδοξη η κατάταξη της έννοιας συνάρτηση στην ίδια κατηγορία με διάφορες συναρτήσεις προκαλεί αντιρρήσεις. Η ιδέες ότι το στιγμιότυπο ενός αντικειμένου είναι αντικείμενο, το πρότυπο ενός αντικειμένου επίσης και η κληρονομικότητα μεταξύ αντικειμένων, είναι δομικές στον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό. Το γεγονός δε ότι υπάρχουν καλά ορισμένες αντικειμενοστραφείς γλώσσες, που έχουν δομηθεί σε αυτή τη βάση, επιβεβαιώνει ότι μια τέτοια κατάταξη μπορεί να είναι λειτουργικότατη. Ίσως ο Inglis δεν συνέλαβε τελικά όλες τις συνέπειες της από μέρους του αποδοχής της αναδιατύπωσης στην βάση των διαδικασιών της θεωρίας του Tall.

2. Η παιδαγωγική διάσταση κατά Tall

Παράλληλα, και θεωρητικά ανεξάρτητα, ο Tall το 2002 έχει αποπειραθεί μια αντιστοίχηση της θεωρίας του - που εδώ αναφέρεται ως 3 κόσμοι αναπαραστάσεων, αποδεικνύοντας ότι από νωρίς έπαιζε με εναλλακτικές εκδοχές της θεωρίας -. με παιδαγωγικές οπτικές και κύρια του Bruner και της αναθεωρητικής σχολής διδασκαλίας απειροστικού λογισμού του Harvard δηλ. με τον κανόνα των τριών και κυρίως των τεσσάρων (Tall, 2003, αφού τότε παρουσιάστηκε σε έντυπη μορφή.). Έτσι, για παράδειγμα, αντιστοιχεί τον συσσωματωμένο αναπαραστατικό κόσμο με τους δύο πρώτους τρόπους μάθησης του Bruner (enactive, iconic) ενώ τόσο ο συμβολικός-διακειμενικός αναπαραστατικός κόσμος όσο και ο τυπικός-αξιωματικός αντιστοιχίζονται με επιμέρους λειτουργίες του συμβολικού τρόπου.
Συγκεκριμένα ο πρώτος αντιστοιχίζεται στον αριθμητικό και αλγεβρικό τρόπο συμβολικής διαχείρισης ενώ ο δεύτερος αφενός στην λογική και αφετέρου στην προφορική (verbal) διαχείριση. Η θεωρία του Bruner είναι δομημένη κυρίως ως διδακτική και για αυτό το λόγο η ευθεία αντιστοίχηση που ο ίδιος ο Tall βλέπει έχει ιδιαίτερη σημασία.
Παρόμοια συμβαίνουν με την αντιστοίχηση, με ενδιάμεσο τους τρόπους του Bruner, με τον κανόνα των τεσσάρων της αναθεωρητικής σχολής διδασκαλίας απειροστικού λογισμού του Harvard. Δεν έχει ιδιαίτερη αξία να επεκταθούμε στην αντιστοίχηση που χρησιμοποίησε, και στις διαφορές που εντόπισε, αλλά στο γεγονός ότι και πάλι πρόκειται για αντιστοίχηση με μια κατ' ουσία διδακτική θεωρία. Στο ίδιο άρθρο προχωρά στη σύνδεση με την ταξινομία SOLO, που είναι κατά βάση μια ταξινομία αξιολόγησης (assessment) της επίτευξης διδακτικών στόχων.

Είναι γεγονός ότι ο ίδιος είναι σαφώς ενήμερος για τις εξελίξεις της γνωστικής επιστήμης και επηρεασμένος από την έννοια της ενσωματωμένης γνώσης (embodied cognition) στην οποία φόρο τιμής αποτελεί ο όρος συσσωματωμένος κόσμος στα Αγγλικά χρησιμοποιείται, αλλά με διακριτό νόημα, ο ίδιος όρος embodied. Μια ενιαία μετάφραση των δύο όρων στα ελληνικά θα δημιουργούσε σύγχυση. Αξιοσημείωτη είναι η χρήση των Lacoff και Nunez (2000) του embodied ως χαρακτηριστικού του συνόλου των μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών. Οι τελευταίοι εννοούν κατά βάση ότι τα μαθηματικά εξαρτώνται από δομές του ανθρώπινου εγκεφάλου όσο και από τις κοινές έννοιες που αναπτύσσονται στα πλαίσια των διάφορων μαθηματικών πολιτισμών (mathematical cultures). Ο Tall προτιμά να αναφέρεται με τον όρο σε σκέψη κατά βάση δομημένη στην αισθητηριακή αντίληψη ως διακριτή της συμβολικής λειτουργίας και της λογικής αφαίρεσης.

Όμως δεν επεκτείνεται σε σύνδεση με τις γνωστικές θεωρίες, αντίθετα η προσέγγισή του είναι κυρίως διδακτική. Αυτό δεν εμποδίζει τον ίδιο σε μια σειρά άλλων άρθρων του όπου συνδυάζει τη θεωρία του με την APOS και συνεργάτες του (όπως π.χ. ο Pegg, 2002) να την προσεγγίζουν ως αναφερόμενη στην ακολουθία με την οποία οι έννοιες δομούνται στο μυαλό του ατόμου, πράγμα που την βάζει στην ίδια κατηγορία με τις θεωρίες των Davis (1984) Dubinsky (Czarnocha et al, 1999), Sfard (1991) κ.ά.

Τα παραπάνω δικαιολογούν την υποψία ότι «η θεωρία των τριών κόσμων» είναι στην πραγματικότητα δύο θεωρίες: μία επιστημολογική – οντολογική με αναφορές σε σωματικές/ βιολογικές λειτουργίες του ανθρώπου και μια καθαρά διδακτική που ενώ συνδέεται με την πρώτη είναι σε κάποιο βαθμό αυτόνομη και πάντως πιο καλά δομημένη. Είναι στην πρώτη που απευθύνει την πετυχημένη κριτική του ο Inglis αλλά είναι η δεύτερη αυτή που αποδέχεται.

3. Η πρότασή μας: τρείς κόσμοι διδασκαλίας

Πιστεύουμε ότι είναι στο παιδαγωγικό/ διδακτικό πεδίο που η θεωρία των τριών κόσμων, στην εκδοχή της που αφορά σε διεργασίες μαθηματικής σκέψης, έχει να προσφέρει τα περισσότερα. Πέρα από το γεγονός ότι σε αυτό το πλαίσιο και με τη συγκεκριμένη μορφή παρουσιάζεται σφριγηλότερη, επιτρέπει και μια σειρά τροποποιήσεων που την ενισχύουν ακόμη περισσότερο για τους σκοπούς μας.

Τροποποιώντας το αντικείμενο ώστε να περιλάβει διεργασίες μάθησης στα πλαίσια της μαθηματικής σκέψης αναδύεται μια αμιγώς αναπτυξιακή θεωρία διδακτικής των μαθηματικών. Για να έχει όμως νόημα η διεύρυνση αυτή οφείλουμε να ξεφύγουμε από την έννοια (concept) καθ' εαυτή που χρησιμοποιεί ο Tall και να την αντικαταστήσουμε με την εικόνα της (concept image) όπως ο ίδιος και ο Vinner την έχουν ορίσει. Αντίστοιχα θα πρέπει να αποδεχτούμε για τα αντικείμενα τον διευρυμένο ορισμό των Tall et al (2000), δηλαδή ότι αντικείμενο είναι κάτι που οι μαθητές μπορούν να διαχειριστούν και να μελετήσουν.

Ταυτόχρονα τίθεται και το θέμα ιστορικότητας που νωρίτερα αναφέραμε. Η ίδια έννοια μπορεί να κινείται ανάμεσα στους κόσμους όσο ο μαθητής-μαθηματικός εξελίσσεται και αντιλαμβάνεται με διαφορετικό τρόπο και αυξημένη πληρότητα τα πράγματα. Έτσι δίνεται μια άλλη διάσταση στη ρήση του Lakoff και των συνεργατών του (Lakoff και Johnson 1999, Lakoff και Nunez 2000) ότι όλα είναι ενσωματωμένα. Μπορεί επίσης η έννοια να μετακινείται ανάμεσα στους κόσμους ανάλογα με τη διεργασία που επιλέγει κανείς να εφαρμόσει πάνω της.

Με την έννοια της ρήσης του Lacoff, οι δυο όροι θα μπορούσαν ξανά να αντικατασταθούν και στα ελληνικά από έναν αφού η ενσωμάτωση/ συσσωμάτωση θα λάμβανε χώρα με την ολοκλήρωση της γνωστικής προσέγγισης της κάθε έννοιας/ αντικειμένου, και την επαναφορά της σε ένα πλαίσιο οικειότητας σαν αυτό του συσσωματωμένου κόσμου. Και αυτό συνδέεται άμεσα με τις δομές του ανθρώπινου μυαλού που ο Lakoff και οι συνεργάτες του εξετάζουν.

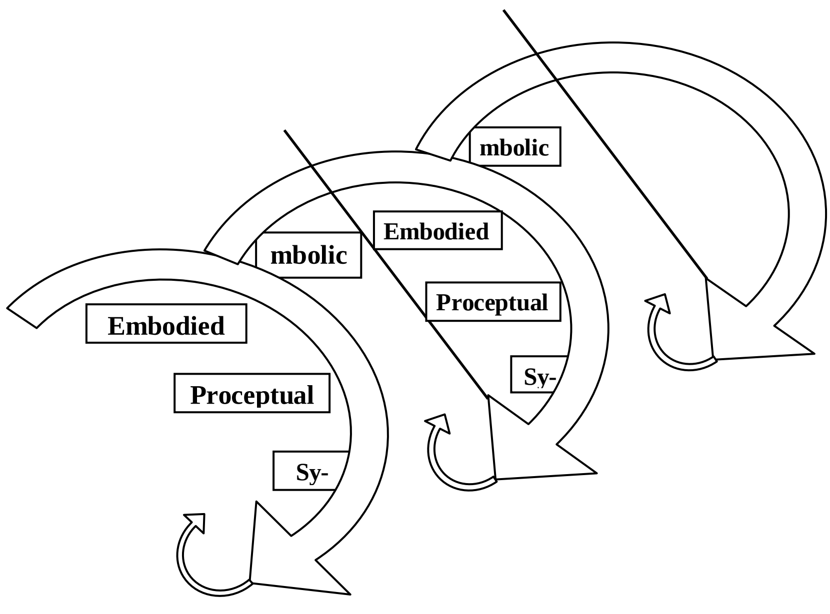
Για να επιστρέψουμε στο βασικό σκεπτικό, οι έννοιες και τα αντικείμενα αντιμετωπίζονται έτσι ως δυναμικά, μπορούν να συναλλάζουν μεταξύ τους περνώντας από τον ένα κόσμο στον άλλο ενώ και οι ίδιοι οι κόσμοι είναι μεταβαλλόμενοι στα πλαίσια της διαρκούς εξέλιξης της μαθηματικής αντίληψης του μανθάνοντος υποκειμένου, το οποίο μπορεί να είναι ο μαθητής-μαθηματικός, ο ερευνητής-μαθηματικός, ή μια κοινότητα με κοινό μαθηματικό πολιτισμό και ανοιχτά προς διερεύνηση ζητήματα. Στην πραγματικότητα βέβαια πρόκειται για την εικόνα των εννοιών και τα νοητικά αντικείμενα (Mamona 2006) που μεταβάλλονται. Σε αυτό το πλαίσιο δεν υπάρχει καμιά σύγκρουση μεταξύ των προσεγγίσεων Tall και Inglis.

Μια τέτοια προσέγγιση μπορεί ακόμα να ενσωματώσει διδακτικούς στόχους που αντιστοιχούν στο τέταρτο (unistructural) επίπεδο της ταξινομίας SOLO (Biggs και Collis 1982) όπου ο διαχωρισμός ανάμεσα στις δύο πιθανότητες γνωστικής ανάπτυξης πέρα από το σχεσιακό επίπεδο εξαρτάται από το άτομο και την οπτική του. Δηλαδή από το αν αντιλαμβάνεται πλέον ως μία ενιαία και συνοπτική οντότητα αυτό που πριν ήταν η ολοκλήρωση διαφόρων πτυχών ή αν αντίθετα η νέα προσέγγιση αντιπροσωπεύει μια ποιοτική διαφοροποίηση στο επίπεδο αφαίρεσης. Στην τελευταία περίπτωση αλλάζουμε τρόπο ή, στο πλαίσιο της θεωρίας μας, αντιληπτικό κόσμο.

Σε παρόμοιο πλαίσιο κινήθηκε ο Pegg (2002) σε συνεργασία με τον Tall στο άρθρο του για τους θεμελιώδεις κύκλους γνωστικής ανάπτυξης. Εκεί ασχολείται με τοπικές θεωρίες όπως διαμορφώνονται μέσα σε ένα σφαιρικό πλαίσιο με παράδειγμα τους αναδυόμενους, σε σχέση με πολλές από αυτές, θεμελιώδεις κύκλους μάθησης.

Η δική μας προσέγγιση αντιμετωπίζει τους τρεις κόσμους ως το ευρύτερο πλαίσιο και ταυτίζει τις διδακτικές διεργασίες με εμπρόθετες κινήσεις μέσα ή δια μέσου αυτών κατά περίπτωση.

Αμφισβητούμε την οικουμενικότητα των θεμελιωδών κύκλων γνωστικής ανάπτυξης θεωρώντας λογικό ότι άτομα διαφορετικού κατά Gardner αντιληπτικού τύπου θα μπορούν να προσεγγίσουν τα μαθηματικά με διαφορετική σειρά προσέγγισης των τριών κόσμων τους.
Άλλωστε και ο ίδιος ο Pegg αναγνώρισε ότι με την ορολογία του Pinto (1998) μια συσσωματωμένη προσέγγιση μπορεί να ευνοεί τους φυσικούς (natural) διανοητές αλλά να δυσχεραίνει τους τυπικούς (formal). Το αντίστροφο φυσικά ισχύει για μια συμβολική προσέγγιση.
Αποδεχόμαστε ωστόσο τη λογική του Skemp (1971) ότι είναι αδύνατο να ορίσεις έννοιες υψηλότερης τάξης και είναι απαραίτητο για το άτομο να αντιμετωπίσει παραδείγματα (και στιγμιότυπα) της έννοιας για να δομήσει το νόημα υψηλότερης τάξης. Η υψηλότερου επιπέδου σκέψη απαιτεί κατοχή του συνόλου των σχετιζόμενων ιδιοτήτων χαμηλότερου επιπέδου. Η υψηλότερου επιπέδου σκέψη σε αυτό το πλαίσιο δεν σημαίνει αυτόματα μεγαλύτερη αφαίρεση. Αντίθετα υποδεικνύει μια ποιοτική κυρίως διαφορά.
Ο συνδυασμός των παραπάνω δίνει στη σπειροειδή ανάπτυξη του Bruner μια διασταλτική ερμηνεία όπου ο καθένας ανεβαίνει στην κάθε σπείρα από διαφορετικό σημείο αλλά διασχίζει ούτως ή άλλως τους κόσμους-τριμόρια για να φτάσει στο αγαπημένο του σημείο για την επόμενη σπείρα. Η άνοδος των επιπέδων της μαθηματικής σκέψης προσομοιάζει σε μας περισσότερο με τον κοχλία του Αρχιμήδη όπου το νερό ανεβαίνει διασχίζοντας ολόκληρη την επιφάνεια της κάθε σπείρας και ανεβαίνοντας σπείρα σπείρα. Η διαδικασία της αποκάλυψης της ανάγκης για έννοιες ενός συγκεκριμένου ορισμού περνά έτσι μέσα από τη διάσχιση των κόσμων, όχι απαραίτητα με την σειρά που τους εισάγει ο Tall αλλά πάντως σειριακά.



Σχημα 1:*Η Μαθηματική Ανάπτυξη δια μέσου των τριών κόσμων*

Τέλος είναι φανερό από τη φύση των τριών κόσμων και των διεργασιών τους ότι απαιτούν διαφορετικές δεξιότητες για το βέλτιστο χειρισμό τους. Άσχετα από το αν και ποιες από αυτές είναι περισσότερο ανεπτυγμένες στο μαθητή κατά την έναρξη μιας μαθησιακής διαδικασίας η ίδια η γνωσιακή ανάπτυξη προσδιορίζεται για μας από την ισομερή ανάπτυξη των τριών αυτών συνόλων δεξιοτήτων, την ευκολία εναλλαγής ανάμεσα σε αυτά και την αύξηση της επίγνωσης και επιτυχίας με την οποία η εναλλαγή αυτή γίνεται. Το ποιες ακριβώς είναι αυτές οι δεξιότητες και πως ακριβώς θα διασφαλιστεί η ανάπτυξή τους αποτελεί μια εξειδίκευση που ξεφεύγει από την εμβέλεια του παρόντος άρθρου αλλά θέτει σημαντικά ζητήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Οι Annie και John Selden (1999) θεωρούσαν ότι ήταν πολύ νωρίς για μία ενοποιημένη θεωρία όμως από τότε μέχρι σήμερα μεσολάβησε ένας μεγάλος αριθμός μελετών που αφορούν στα επιμέρους ζητούμενα και πιθανόν η συγκυρία να έχει ωριμάσει.

Βιβλιογραφία –Πηγές

1. Abott, E. A. (1995), Η Επίπεδη χώρα, Εκδόσεις Νικκαν (original publication: “Flatland: A Romance of Many Dimensions”,1884)
2. Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. and Schwingendorf, K. (1997), ‘The development of students’ graphical understanding of the derivative’, Journal of Mathematical Behavior 16(4), 399-431.
3. Biggs, J. & Collis, K. (1982). Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy. New York: Academic Press.
4. Bruner, J. S. (1966). Towards a Theory of Instruction, New York: Norton.
5. Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, 1, 95-110.
6. Davis, R. (1984) Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education, Norwood, NJ, Ablex.
7. Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.
8. Gardner, Howard. (1983) "Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences." New York: Basic Books. Gardner, Howard. (1993) "Multiple Intelligences: The Theory In Practice." New York: Basic Books.
9. Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, 115–141.
10. Inglis, Matthew (2003) Three worlds and the imaginary sphere (http://www.lsri.nottingham.ac.uk/mji/files/flm2003.pdf)

11. Inglis, Matthew (2006) Reconsidering the Imaginary Sphere, In Retirement as Process and Concept. A Festschrift for Eddie Gray and David Tall presented at Charles University, Prague 15-16 July, 2006
12. Lakoff, G. & Johnson, M. (1999). Philosophy in the Flesh. New York: Basic Books.
13. Lakoff, G. & Nunez, R. (2000). Where Mathematics Comes From. New York: Basic Books.
14. Mamona-Downs, Joanna (2006) Procepts and Property-Based Thinking, to what extent the two are co-operative? In Retirement as Process and Concept. A Festschrift for Eddie Gray and David Tall presented at Charles University, Prague 15-16 July, 2006
15. Pegg, J. (2002). Fundamental Cycles of cognitive growth. In Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK, 4, 369–376.
16. Pimm, D. (1987) Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms, London, Routledge and Kegan Paul
17. Selden Annie, Selden John (1999). Tertiary Mathematics Education Research and Its Future. Tennessee TechnologicalU University,Technical Report, No. 1999-6, 1-3 (http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_1999_6.pdf)
18. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, 1, 1–36.
19. Skemp R.R. (1971). The Psychology of Learning Mathematics, Penguin Books Ltd.
20. Tall, D. O. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). Plenary presentation for ATCM conference, Chang Mai, Thailand, December 2000.{ In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand (pp. 3–20). ATCM Inc, Blackwood VA..}
21. Tall, D. O., Thomas, M. O. J., Davis, G. E., Gray, E. M. & Simpson A. P (2000). What is the object of the encapsulation of a process?, Journal of Mathematical Behavior, 18 (2), 1–19.
22. Tall, D.O., Gray, E., M,, bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D.,Pinto, M., Thomas, M., Yusof, Y., (2000). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, The Canadian Journal of Science, Mathematics and TechnologyEducation, 1, 80–104.
23. Tall, D. O. & Vinner S., (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics 12 151–169.
24. Tall, D. O. (2002a). Natural and Formal Infinities, Educational Studies in Mathematics, 48 (2&3), 199–238.
25. Tall, D. O. (2002b). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.
26. Tall,D.O.(2004) Introducing three worlds of mathematics (http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf)

27. Vinner, S. & Hershkowitz R. (1980). Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts', Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley, 177–184
28. Watson, A. (2002). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. In Anne D., Cockburn & Elena Nardi (Eds), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 369–376. Norwich: UK.
29. Watson, A., Spirou, P., Tall, (2003). The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. The Mediterranean Journal of Mathematics Education. 1 2, 73– 97.